**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Экстремальные задачи

Extremal Problems

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 3

Регистрационный номер рабочей программы: 051650

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Дисциплина дает подход к решению экстремальных задач, возникающих в различных разделах математики и компьютерных науках, и предлагает ряд конкретных алгоритмов их решения. Изучаются математические методы непрерывной и дискретной оптимизации, постановка основных задач оптимизации, общие и специальные методы их решения.

Основным методологическим принципом построения программы курса, является принцип поэтапного системного накопления знаний и формирования необходимых компетенций по модели: от простого и/или знакомого к сложному и/или незнакомому.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

– уметь доказывать все теоремы курса;

– уметь решать предложенные лектором задачи;

– понимать идейные связи между различными областями математики, использующими теорию графов.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Выпускник должен:

уметь доказывать все теоремы курса;

уметь решать предложенные лектором задачи;

понимать идейные связи между различными областями математики, использующими теорию графов.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Обучающийся должен знать содержание дисциплины «Экстремальные задачи». Необходимо представлять круг решаемых задач, уметь применять изученную методику, учитывать сложности и особенности практической реализации методов, входящих в программу курса.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 5 | 30 |  | 2 | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 21 |  | 23 |  | 30 | 3 |
|  | 2-100 |  | 2-100 | 10-25 |  |  |  |  | 2-100 |  |  |  | 1-1 |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | 30 |  | 2 | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  |  | 21 |  | 23 |  |  | 3 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 5 |  |  | экзамен, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

**Тема 1. Линейное программирование**

Двойственные задачи линейного программирования

Неравенство значений целевых функций в двойственных задачах.

Достаточные условия оптимальности. Условия дополнительности.

Задача линейного программирования в канонической форме. Сведение к ней. Эквивалентность двойственной задачи и задачи, двойственной к канонической.

Первая теорема двойственности для задачи в канонической форме.

Первая теорема двойственности. Вторая теорема двойственности.

Базисные векторы. Теорема о существовании оптимального базисного плана в канонической задаче. 4 возможных случая для прямой и двойственной задач линейного программирования.

Графический метод решения задачи с двумя ограничениями. Симплекс-метод для невырожденной задачи. Постановка сетевой транспортной задачи. Сведение к задаче линейного программирования. Невырожденность для транспортной задачи. Решение сетевой транспортной задачи методом потенциалов..

**Тема 2. Теория игр**

Игра n лиц в нормальной форме. Ситуации равновесия по Нэшу.

Антагонистические игры. Свойства ситуаций равновесия в антагонистических играх.

Теорема о минимаксе. Значение игры.

Примеры отсутствия свойств антагонистических игр в неантагонистических.

Смешанное расширение игры в нормальной форме. Теорема фон Неймана.

Решение матричных игр с помощью линейного программирования. Конструктивное доказательство теоремы фон Неймана.

Приемы решения матричных игр (леммы об угадывании, о спектре, о доминировании).

Аксиоматика Вилкаса значения матричной игры.

**Тема 3.** Нелинейное программирование

Условие оптимальности для задач с дифференцируемой целевой функцией и линейными ограничениями. Случай выпуклой целевой функции.

Функция Лагранжа для задач с ограничениями в виде неравенств и равенств. Ее связь с задачей оптимизации. Нахождение седловой точки функции Лагранжа. Теорема Куна-Таккера.

**Тема 4.** Векторная оптимизация

Постановка задачи. Парето-оптимальные и слабо Парето-оптимальные точки.

Параметрическое описание множества слабо Парето-оптимальных точек. Теоремы Гермейера и Карлина-Гурвича. Примеры существенности условий Карлина-Гурвича.

Арбитражная схема Нэша. Случай отсутствия симметрии.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Успешное освоение дисциплины возможно благодаря посещению лекций и практических занятий, участию в обсуждении вопросов, подготовленных к занятию, выполнению индивидуальных заданий, самостоятельной работе, включающей в себя чтение специальной литературы по разделам темы, выполнение домашних заданий по тематике курса.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

При выполнении индивидуальных и контрольных заданий обучающемуся необходимо знать содержание лекций, уметь формулировать определения основных понятий и утверждений, уметь применять методы доказательств при решении конкретных задач. При подготовке к самостоятельной работе целесообразно использовать рекомендованные учебники и задачники, а также дополнительную литературу.

Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы:

1. Некоторые задачи оптимального управления.

2. Множество управляемости и функция Беллмана в задаче быстродействия.

3. Понятие о дифференциальных играх преследования.

4. Основные определения теории графов. Кликовые и хроматические числа графов.

5. Постановка задачи вершинного поиска.

6. Лемма о субмодулярности граничного оператора.

7. Построение клубка в случае существования выигрывающей программы.

8. Построение увеличивающегося клубка.

9. Построение монотонной выигрывающей программы в случае существования увеличивающегося клубка.

10. Графы интервалов и их свойства.

11. Теорема Гилмора-Хоффмана о характеризации графов интервалов (3 => 1 и 1 => 2).

12. Теорема Гилмора-Хоффмана о характеризации графов интервалов (2 => 3).

13. Теорема о вершинно-поисковом числе графа интервалов.

14. Теорема о вершинно-поисковом числе произвольного графа.

15. Формулировка теоремы о матрице сетей-ключей.

16. Теорема о характеризации хордального графа в терминах минимальных разделителей.

17. Теорема о характеризации хордального графа в терминах РЕ-упорядочения.

18. Теорема о совершенстве хордальных графов.

19. Задача о полицейском числе.

20. Другие задачи поиска на графах.

Темы курсовых работ (6 сем).

Курсовая работа по данной дисциплине не предусмотрена. Тем не менее, желающим могут быть предложены следующие темы для научно-исследовательской работы:

1. Определение вершинно-поискового числа для некоторых классов графов.

2. Определение рёберно-поискового числа для некоторых классов графов.

3. Поиск с заданным радиусом поиска.

4. Поиск с ограничениями на скорости участников.

5. Поиск с противодействием.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

Методика проведения экзамена

Экзамен проводится в устной форме. Билет состоит из двух вопросов. Время подготовки ответа на вопросы билета составляет 60 минут.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы экзамена не разрешается. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт, и обучающийся удаляется с экзамена.

После ответа на вопросы билета преподаватель задает несколько дополнительных вопросов, на основании оценки ответов на которые итоговая оценка по предмету может быть повышена или понижена.

*Критерии выставления оценок:*

Оценка «отлично» ставится за полностью раскрытый теоретический материал и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка «хорошо» ставится за изложенный теоретический материал билета (возможно с помощью наводящих подсказок преподавателя) и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка «удовлетворительно» ставится за знание ответов на основные вопросы по каждой теме.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если не выполняются условия для получения оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно».

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства**

Примерный перечень вопросов по всему курсу:

1. Некоторые задачи оптимального управления, множество управляемости, функция Беллмана в задаче быстродействия.

2. Понятие о дифференциальных играх преследования.

3. Основные определения теории графов.

4. Постановка задачи вершинного поиска, лемма о субмодулярности граничного оператора.

5. Построение клубка в случае существовании выигрывающей программы.

6. Построение увеличивающегося клубка.

7. Построение монотонной выигрывающей программы в случае существования увеличивающегося клубка.

8. Графы интервалов и их свойства.

9. Теорема Гилмара-Хоффмана.

10. Теорема о вершинно-поисковом числе графа интервалов. Общий случай.

11. Теорема о матрице сетей ключей.

12. Теорема о характеризации хордальных графов.

13. Теорема о совершенстве хордальных графов.

14. Другие задачи поиска на графах.

Примерный краткий перечень вопросов к экзамену:

Часть 1. Линейное программирование.

1. Двойственные задачи линейного программирования

2. Неравенство значений целевых функций в двойственных задачах.

3. Достаточные условия оптимальности. Условия дополнительности.

4.Теоремы об отделимости выпуклых множеств (формулировки).

5. Лемма Фаркаша с доказательством.

6. Задача в канонической форме. Сведение к ней. Эквивалентность двойственной задачи и задачи, двойственной к канонической.

7. Первая теорема двойственности для задачи в канонической форме.

8. Первая теорема двойственности.

9. Вторая теорема двойственности.

10. Базисные векторы. Теорема о существовании оптимального базисного плана. 4 возможных случая для прямой и двойственной задач линейного программирования.

11. Графический метод решения задачи с двумя ограничениями.

12. Нахождение базисного плана в канонической задаче.

13. Условие невырожденности в симплекс-методе.

14. Проверка базисного плана на оптимальность.

15. Переход к новому плану в случае отсутствия оптимальности. Почему получается снова базисный план?

16. Итеративные формулы пересчета в симплекс-методе.

17. Обоснование сходимости симплекс-метода в невырожденном случае.

18. Постановка сетевой транспортной задачи. Сведение к задаче линейного программирования. Невырожденность для транспортной задачи.

19. Базисные планы для невырожденной транспортной задачи.

20. Нахождение базисного плана в невырожденной транспортной задаче.

21. Проверка плана транспортной задачи на оптимальность методом потенциалов.

22. Перестройка плана транспортной задачи в случае неоптимальности. Почему новый план – базисный?

23. Использование «правильной» нумерации вершин и дуг дерева в транспортной задаче.

24. Обоснование сходимости метода потенциалов для транспортной задачи в невырожденном случае.

Часть 2. Теория игр

25. Игра n лиц в нормальной форме. Ситуации равновесия по Нэшу.

26. Антагонистические игры. Свойства ситуаций равновесия в антагонистических играх.

27. Теорема о минимаксе. Значение игры.

28. Примеры отсутствия свойств антагонистических игр в неантагонистических.

29. Смешанное расширение игры в нормальной форме. Теорема фон Неймана.

30. Решение матричных игр с помощью линейного программирования. Конструктивное доказательство теоремы фон Неймана.

31. Приемы решения матричных игр (леммы об угадывании, о спектре, о доминировании).

32. Аксиоматика Вилкаса значения матричной игры.

Часть 3. Нелинейное программирование.

33. Необходимое условие оптимальности для задач с дифференцируемой целевой функцией и линейными ограничениями.

34. Необходимое и достаточное условие оптимальности для задач с дифференцируемой выпуклой целевой функцией и линейными ограничениями.

35. Функция Лагранжа для задач с ограничениями в виде неравенств и равенств. Ее связь с задачей оптимизации.

36. Описание седловой точки функции Лагранжа.(Глобальная оптимальность)

37. Теорема Куна-Таккера. (Когда решение – часть седловой точки функции Лагранжа? )

38. Пример, когда решение существует, но не находится с помощью функции Лагранжа.

Часть 4. Векторная оптимизация

39. Постановка задачи. Парето-оптимальные и слабо Парето-оптимальные точки.

Параметрическое описание множества слабо Парето-оптимальных точек. Теоремы Гермейера и Карлина-Гурвича. Примеры существенности условий Карлина-Гурвича.

40. Арбитражная схема Нэша. Случай отсутствия симметрии.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Оценка обучающимися содержания и качества учебного процесса по дисциплине осуществляется в установленном в СПбГУ порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций и проведению семинаров привлекаются преподаватели, имеющие базовое образование и ученую степень, соответствующую профилю преподаваемой дисциплины.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории для проведения интерактивных занятий.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Не требуется.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

При использовании электронных документов каждый обучающийся во время самостоятельной подготовки должен быть обеспечен рабочим местом в компьютерном классе с выходом в Интернет и корпоративную сеть факультета.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Канцелярские товары в объеме, необходимом для организации и проведения занятий по заявкам преподавателей, подаваемым в установленные сроки, доступ преподавателя и студентов к в компьютерные классы.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Ржевский С.В. Исследование операций. СПб, Лань, 2013

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Гавурин М.К., Малоземов В.Н. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Л., ЛГУ, 1984.

2. Галлеев Э.М. Оптимизация. Теория, примеры, задачи. М., 2002.

3. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М. Мир, 1964

4. Карманов В.Г. Математическое программирование. М. ФИЗМАТЛИТ, 2001.

5. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., ФИЗМАТЛИТ, 2007

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

1. http://math.spbu.ru/kio/ - ЭР открытого доступа в сети интернет,   
сайт кафедры исследования операций (Избранные лекции).

**Раздел 4. Разработчики программы**

Наумова Наталия Ивановна, доцент мат-мех факультета СПбГУ, nataliai.naumova@mail.ru тел. 428-42-33.